1. לכל סדרה גם
2. אם אז גם

# הגדרה

יהי מרחב. -אלגברה של היא משפחה של מאורעות כך ש:

## הערה

1. סגור לאיחוד סופי
2. סגור לאיחוד בן מניה
3. סגור לאיחוד כלשהו.

# הערה

תהי -אלגברה. אם אז גם .

# תרגיל

תהי . הוא -אלגברה.

נניח ש סתם משפחה של קבוצות. אפשר להגדיר .  
 – ה-אלגברה הקטנה ביותר המכילה את T. ה"-אלגברה הנוצרת על ידי T"

# טענה

תהי F σ-אלגברה על מרחב . התנאים הבאים שקולים עבור המקיים , ו לכל , ואם זגרות אזי :

1. לכל זרים בזוגות
2. לכל ,
3. לכל ,

# הוכחה

(1)⇦(2):  
נתונה סדרה עולה של קבוצות, . נגדיר ().  
לכל , .  
לפי ההנחה,

(2)⇦(3):  
נתונה סדרה יורדת . נבחר . ברור ש. לפי ההנחה,

(3)⇦(2): כמו (2)⇦(3)

(2)⇦(1):  
נתונה סדרה של מאורעות זרים בזוגות. נבחר . לפי ההנחה:

# הגדרה

מרחב הסתברות הוא שלשה סדורה כאשר מקיימת:  
 לכל   
   
לכל זרים בזוגות,

# דוגמה כללית

קבוצה בת מניה, , כאשר פונקציה חיובית המקיימת

# בעיית ברטרנד

מעבירים מיתר אקראי במעגל. מה הסיכוי שהוא יהיה ארוך מהצלע של משולש שווה צלעות החסום במעגל?

## פתרון ראשון:

נקבע נקודת קצה ראשונה. המיתר ארוך מהצלע ⬄ נקודת הקצה השניה בשליש הנגדי לנקודה.

## פתרון שני

נקצה רדיוס מסויים ונבחר את המיתר במאונך אליו. המשולש שווה הצלעות חוצה את הרדיוס בדיוק באמצע, לכן הסיכוי הוא

## פתרון שלישי

מיתר של מעגל מוגדר ע"י נקודה אחת – נקודה האמצע - שכן רק רדיוס אחד עובר דרך אותה נקודה והמיתר מאונך לרדיוס. נבחר את נקודת האמצע באקראי. המיתר המתאים ארוך מן הצלע אם ורק אם נקודת האמצע במרחק הרדיוס מהמרכז, לכן הסיכוי הוא

נגדיר σ-אלגברה על :  
 "אלגברת בורל" – כוללת את , סגורה למשלים ולאיחוד בן מניה.

B היא הσ-אלגברה הקטנה ביותר הכוללת את כל הקטעים הפתוחים

# טענה+הוכחה

אלגברת בורל כוללת את כל הקטעים והקרניים:

B כוללת כל קבוצה בת מניה:

# עובדה

. למעשה